

Équations de Cauchy-Riemann

Une fonction complexe $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ est dite holomorphe (ou analytique) dans un domaine D du plan complexe si les équations de *Cauchy-Riemann*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

sont satisfaites.

Continuité d'une Fonction Complexe

Une fonction complexe $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ est continue au point z_0 si :

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \text{ existe, } f(z_0) \text{ existe, et } \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

Ceci est équivalent aussi à vérifier que $u(x, y)$ et $v(x, y)$ sont toutes deux continues.

Dérivée d'une Fonction Holomorphe

La dérivée d'une fonction holomorphe $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ est

$$f'(z) = \frac{df(z)}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Un raccourcis pour vérifier l'holomorphic d'une fonction différentiable donnée en termes de z est de vérifier si la fonction ne dépend pas de \bar{z} : $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

Séries Complexes

Une série complexe $\sum (a_n + ib_n)$ est convergente si et seulement si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont toutes deux convergentes.

Quelques Testes de Convergences

Avant d'effectuer un quelconque teste il faut d'abord s'assurer de la condition nécessaire de convergence $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Teste du rapport: Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1$: $\sum u_n$ est convergente. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| > 1$: divergente.

Teste de la racine: Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} < 1$: $\sum u_n$ est convergente. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} > 1$: divergente.

Quelques Séries Usuelles

Séries géométriques: $\sum r^n$ est convergente si $|r| < 1$, divergente si $|r| \geq 1$.

Série de Riemann: $\sum \frac{1}{n^p}$ est convergente si $p > 1$, divergente si $p \leq 1$.

Séries alternées: $\sum (-1)^n u_n$ est convergente si $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = 0$. (Avec $u_{n+1} \leq u_n$.)

Somme de la Série Géométrique

$$1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

$$\text{Lorsque } |r| < 1: \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = \frac{1}{1 - r}.$$